

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT DE :

- **Géomètres de l'IGN**

SESSION 2016

**ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE N° 2 :
MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE-CHIMIE**

Durée : 3 heures

Coefficient : 5

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction des réponses seront pris en compte dans la notation.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'utilisation de toute documentation est strictement interdite.

Cette épreuve se compose de deux parties :

- Partie A : Mathématiques (10 points)
- Partie B : Physique-Chimie (10 points)

Ce sujet comporte 12 pages (page de garde incluse).

Partie A - Mathématiques

Le sujet comporte 4 exercices indépendants sous forme de QCU : une seule réponse est exacte par item.

Les résultats doivent être portés sur la feuille réponse fournie.

1- On considère les fonctions $f : \left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right\}$ et $g : \left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right\}$.

Q1 :

- a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \in [0,1]$ et $g(x) \leq f(x)$.
- b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ et $g(x) \leq f(x)$.
- c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ et $g(x) \in [-1,1]$.
- d) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$ et $g(x) \in [-1,1]$.

Q2 :

- a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$.
- b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.
- c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$ et $g'(x) = g(x)$.
- d) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = 0$.

Q3 :

- a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(f(x)) = 0$.
- b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(f(x)) = -\frac{x^2}{2}$.
- c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(f(x)) = \sqrt{\ln(e^x + e^{-x})}$.
- d) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(f(x)) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2)$.

2- On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Q4 :

- a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < u_n$.
- b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > u_n$.
- c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < u_n$.
- d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > u_n$.

Q5 :

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n - \frac{3}{2}$.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + \frac{3}{n}$.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 - \frac{3}{n}$.
- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

Q6 : On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 3n + 1$.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (3n + 1)^2$.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1) \left(\frac{3}{2}n + 1 \right)$.
- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1)(3n+1)$.

3- On considère, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $S(1, -2, 0)$ et le plan P d'équation : $x + y - 3z + 4 = 0$.

Q7 : Une représentation paramétrique de la droite d passant par le point S et perpendiculaire à P est :

a)
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} ;$$

b)
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} ;$$

c)
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} ;$$

d)
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} .$$

Q8 : Les coordonnées du point d'intersection H de la droite d avec le plan P sont :

a) $(-4, 0, 0)$;

b) $\left(\frac{6}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

c) $\left(\frac{8}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{9}{11}\right)$;

d) $\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Q9 : L'intersection entre la sphère de centre S et de rayon 3 et le plan P est :

a) le point $I(1, -5, 0)$;

b) le cercle du plan P , de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$;

c) le cercle du plan P , de centre S et de rayon $r = 2$;

d) le cercle du plan P , de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

- 4- On considère une population dont 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds et 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

Q10 : Conditionnellement à l'événement « avoir les yeux bruns », la probabilité p de l'événement « avoir les cheveux blonds » est :

- a) $p = 0,35$;
- b) $p = 0,50$;
- c) $p = 0,75$;
- d) $p = 0,375$.

Q11 : Conditionnellement à l'événement « avoir les cheveux blonds », la probabilité p de l'événement « avoir les yeux bruns » est :

- a) $p = 0,60$;
- b) $p = 0,65$;
- c) $p = 0,35$;
- d) $p = 0,375$.

Q12 : Conditionnellement à l'événement « avoir les cheveux blonds », la probabilité p de l'événement « ne pas avoir les yeux bruns » est :

- a) $p = 0,35$;
- b) $p = 0,75$;
- c) $p = 0,85$;
- d) $p = 0,40$.

Partie B - Physique-Chimie

Le sujet est un QCU, questionnaire à choix unique, composé de 12 questions indépendantes, même au sein d'un même exercice. Chaque question a une réponse exacte et une seule.

Vous porterez votre réponse en cochant la case correspondant à votre choix sur la feuille-réponse distribuée avec le sujet.

Elément de barème :

- Toute réponse illisible, fausse ou multiple sera pénalisée.
- Les questions restées sans réponse ne seront pas prises en compte.

Question 1

On chauffe 365 g d'eau dans un four à micro-ondes de puissance 850 W. La température de l'eau passe de 17,2°C à 52,3°C en 1 min 45 s. Quel est le rendement de conversion du four ?

Donnée : Capacité massique de l'eau liquide : $C_{\text{eau liquide}} = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Réponses possibles :

A	B	C	D
$6,0.10^{-4}$	$6,0.10^{-1}$	$6,2.10^{-4}$	62%

Question 2

La période de révolution de Titan, l'un des satellites de Saturne, est de 15,95 jours terrestres. En première approximation, on considérera que la trajectoire de Titan est circulaire.

Quelle est la vitesse de révolution de Titan ?

Données :

Masse de Titan : $m_{\text{Titan}} = \frac{1}{45} m_{\text{Terre}}$ Masse de la Terre : $m_{\text{Terre}} = 5,97.10^{24} \text{ kg}$

Distance Titan-Saturne : $d_{\text{Titan-Saturne}} = 1\,221\,870 \text{ km}$

Masse de Saturne : $m_{\text{Saturne}} = 5,68.10^{26} \text{ kg}$

Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Réponses possibles :

A	B	C	D
$5,00.10^4 \text{ m.s}^{-1}$	$2,00.10^4 \text{ km.h}^{-1}$	$1,76.10^5 \text{ m.s}^{-1}$	$2,00.10^3 \text{ km.h}^{-1}$

Question 3

La photo ci-contre, de définition 4000 × 3000, a été encodée par un appareil photo sous un format 24 bits RVB.

Quelle sera la taille de cette photo ?

Donnée : 1 Mio = 2^{20} octets

1 octet = 8 bits

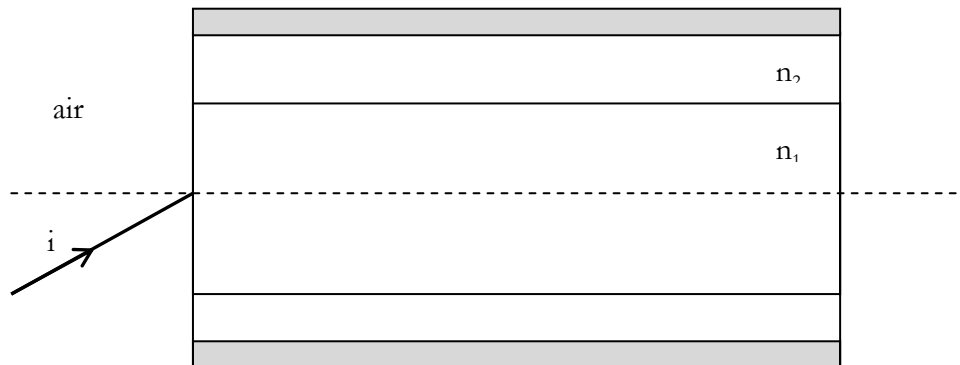


Réponses possibles :

A	B	C	D
824 Mio	275 Mio	103 Mio	34,3 Mio

Question 4

On souhaite transmettre un signal lumineux à l'aide d'une fibre optique. Cette fibre est constituée d'un cœur en silice d'indice n_1 , entouré d'une gaine en silicone d'indice n_2 puis d'une protection opaque.



Quelle est la valeur maximale de l'angle d'incidence i pour que la totalité du signal soit transmise ?

Donnée :

Indices pour la radiation lumineuse considérée :

Indice de l'air : $n_{\text{air}} = 1,00$

Indice du cœur : $n_1 = 1,456$

Indice de la gaine : $n_2 = 1,410$

Réponses possibles :

A	B	C	D
$3,72 \cdot 10^{-1}$ rad	$2,16 \cdot 10^{-1}$ rad	$1,32 \cdot 10^{-1}$ rad	$7,58^\circ$

Question 5

Une flèche, tirée d'une hauteur de 1,40 m, part vers le haut avec une vitesse initiale de 60 km/h. Cette vitesse initiale fait un angle de 12° avec l'horizontale. Le cœur de la cible est situé à 1,0 m de hauteur et a un diamètre de 20 cm. A quelle distance du tireur le cœur de cible est-il atteint ?

Données :

Masse de la flèche : $m_{\text{flèche}} = 50$ g

Intensité de la pesanteur : $g = 9,81$ m.s⁻²

Réponses possibles :

A	B	C	D
39 m	40 m	12 m	13 m

Question 6

Un groupe musical comportant 10 violons se produit sur une scène. On estime à 70 dB le niveau sonore produit par un seul violon à 5 m. On considère que tous les violons sont à 5 m de l'auditeur.

Calculer le niveau sonore produit par le groupe musical.

Données : Intensité minimale audible : $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}$ W.m⁻²

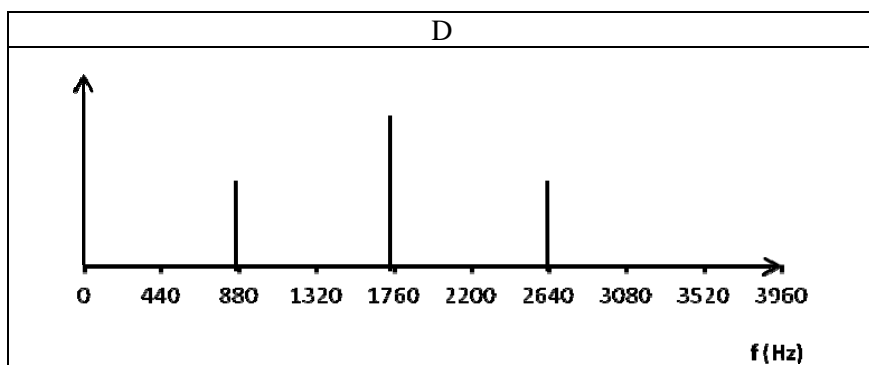
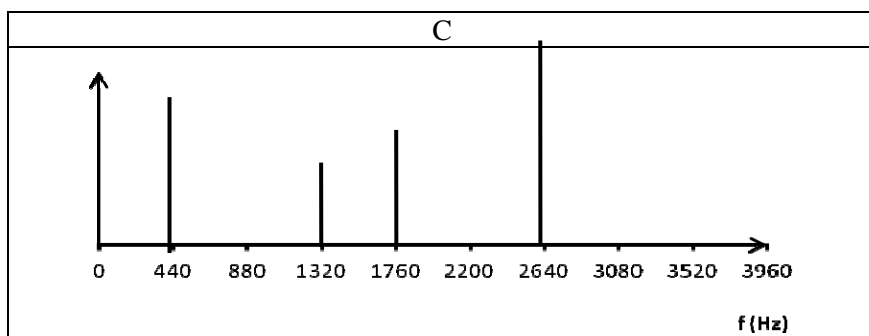
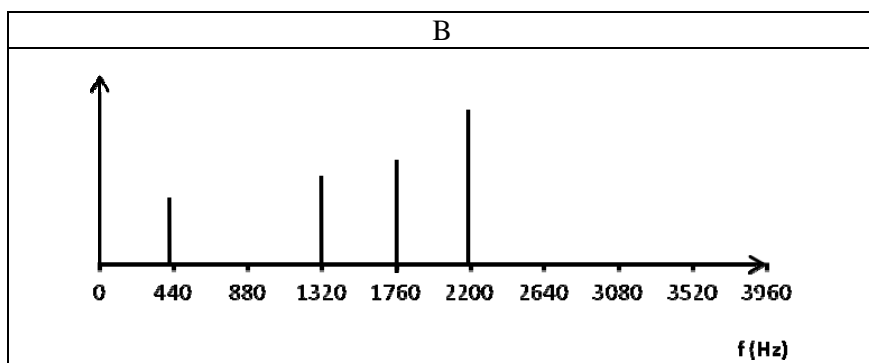
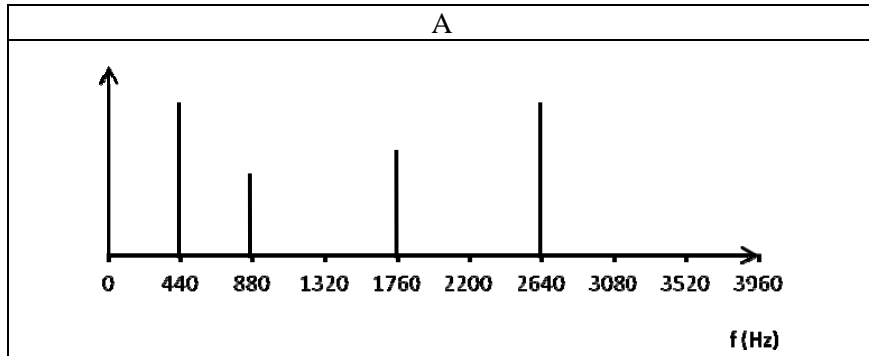
Réponses possibles :

A	B	C	D
60 dB	77 dB	80 dB	700 dB

Question 7

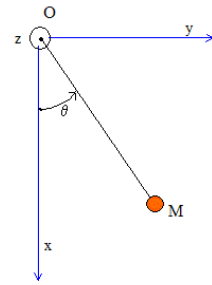
Un violon joue un la_3 , de fréquence 440 Hz. Cette note est un son complexe, composé des harmoniques de rang 3, 4 et 6. Quel spectre correspond à cette note ?

Réponses possibles :



Questions 8 et 9

Un pendule de masse 350 g et de longueur 50 cm est écarté de sa position d'équilibre d'un angle de 21° . Il est lâché sans vitesse initiale.



8. Dans un premier temps, on néglige les frottements. Quelle est la valeur maximale de la vitesse atteinte par ce pendule.

Données :

Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Réponses possibles :

A	B	C	D
$8,1 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$	$8,1 \text{ m.s}^{-1}$

9. On reprend le pendule précédent avec les mêmes conditions initiales.

En réalité, les frottements ne sont pas négligeables. Au bout de 4 min, le pendule a perdu 20% de son énergie initiale. Quel est la valeur du travail des forces de frottement ?

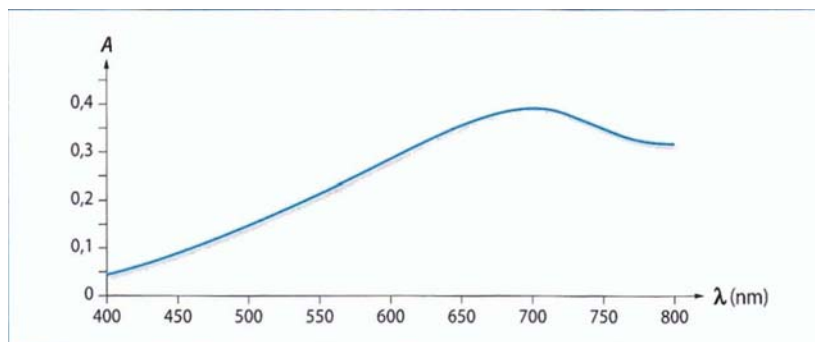
Réponses possibles :

A	B	C	D
2,28 J	$2,28 \cdot 10^2 \text{ J}$	$2,28 \cdot 10^{-2} \text{ J}$	$2,28 \cdot 10^2 \text{ mJ}$

Questions 10 et 11

Le phosphore, comme l'azote, est une substance nutritive des végétaux. En temps normal, les quantités modérées de ces éléments dans l'eau limitent le développement des algues. En revanche, un apport excessif d'azote et de phosphore entraîne leur prolifération : c'est le phénomène d'eutrophisation de l'eau, qui a pour conséquence la diminution de la biodiversité et, à plus long terme, la transformation des lacs en marais, puis en prairies.

On souhaite connaître la concentration en ions phosphate présents dans un échantillon d'eau, prélevé dans un lac, et pouvoir ainsi vérifier la qualité de cette eau. Pour cela, on dose par spectrophotométrie les ions phosphate.



Spectre d'absorption des ions phosphate.

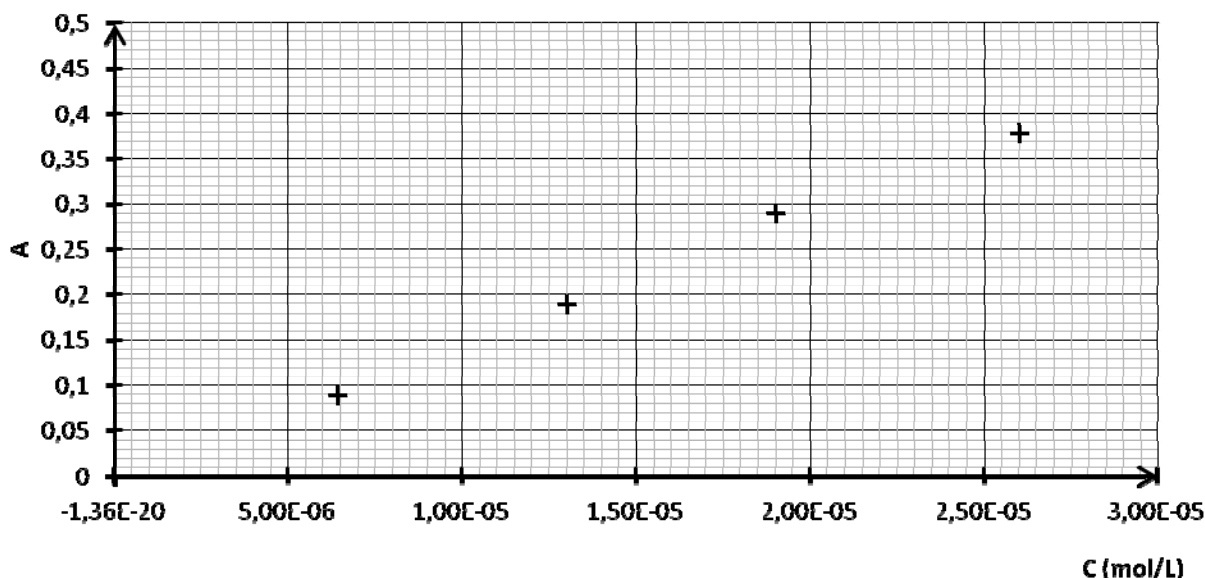
10. A quelle longueur d'onde doit-on se placer pour réaliser ce dosage ?

Réponses possibles :

A	B	C	D
700 nm	600 nm	500 nm	400 nm

11. On réalise le dosage spectrophotométrique précédent. On obtient la courbe d'étalonnage suivante avec C : concentration en ions phosphate dans la solution considérée.

$$A = f(C)$$



On mesure l'absorbance de l'eau du lac. On obtient : $A_{\text{eau}} = 0,34$. Quelle est la qualité de l'eau du lac ?

Données :

Masses molaires : $M(\text{P}) = 30,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Qualité de l'eau :

$[\text{PO}_4^{3-}]$ en mg/L	0,1	0,5	1,0	2,0
Qualité de l'eau	Très bonne	Bonne	Passable	Mauvaise

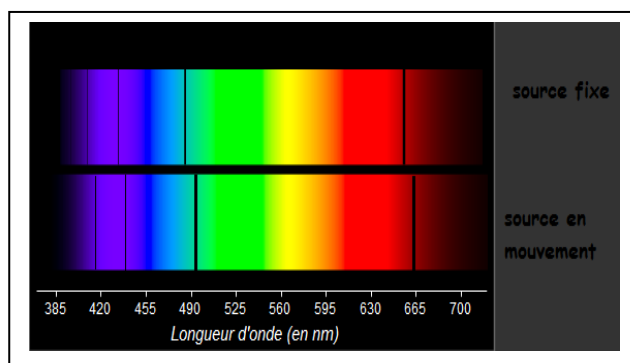
Réponses possibles :

A	B	C	D
Très bonne	Bonne	Passable	Mauvaise

Question 12

On observe depuis la Terre le spectre d'absorption de l'hydrogène d'une étoile. Ce spectre se déplace vers le rouge.

En utilisant l'effet doppler appliqué à l'astrophysique, que peut-on dire de cette étoile ?



Réponses possibles :

A	B	C	D
Elle s'approche de la Terre	Elle s'éloigne de la Terre	Elle est immobile par rapport à la Terre	Elle est immobile par rapport au soleil

Partie A – Mathématiques
Feuille-réponse

Mettre une croix dans la case voulue. Une seule croix par ligne.

Réponse Question	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Partie B – Physique-Chimie
Feuille-réponse

Réponse Question	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				